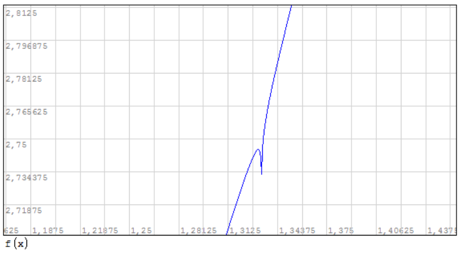
75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ______________________________ Nº de Padrón: ________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada : _____ Cuatrimestre: ___ Nota: ___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 1

Pregunta 1: La siguiente función $f(x) = 1 + x^2 + \frac{\log(|1 + 3(1 - x)|)}{80}$ no está definida para $x = \frac{4}{3}$. Sin embargo, algunos programas dibujan una curva como la que se ve en la figura siguiente. ¿Puede explicar la razón?



Pregunta 2: Usted dispone de un conjunto de 20 pares $[t_i; y_i]$ que representan puntos de una trayectoria en función del tiempo. Se le pide que aproxime la velocidad instantánea en esos puntos.

1. Indique algún método para obtener la velocidad pedida.
2. Alguien sugiere usar un método de interpolación polinomial (Lagrange o Newton). ¿Qué opina usted?
3. Finalmente, ¿usaría una aproximación por cuadrados mínimos?

Pregunta 3: Un método numérico para resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 es el siguiente:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\, y'_i + \frac{h^2}{2!} f(x_i; y_i; y'_i) \\ y'_{i+1} &= y'_i + h\, f(x_i; y_i; y'_i) \end{aligned}$$

¿Cómo haría para determinar el orden de convergencia del método?

Firma alumna/o

75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ____ Nº de Padrón:________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada :_____ Cuatrimestre:___ Nota:___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 2

Pregunta 1: El AutoCAD dispone de una función para dibujar curvas «splines». Esta función solicita que se indiquen los puntos por donde debe pasar la curva y las derivadas en ambos puntos extremos.

1. ¿Puede definir qué tipo de «splines» utiliza ese programa?
2. ¿Cómo haría para estimar esas derivadas si contara con los datos numéricos de los puntos por donde deben pasar las curvas?

Pregunta 2: El **Método de los Gradientes Conjugados** (MGC) para resolver *Sistemas de Ecuaciones Lineales* requiere que la matriz de coeficientes del sistema sea simétrica y definida positiva:

1. Indique si este método puede aplicarse a para resolver un sistema que surge de plantear una interpolación polinomial mediante trazadores cúbicos («spline») de cualquier tipo, justificando su respuesta;
2. Asimismo, ¿puede aplicarse para resolver el sistema que surge de plantear una aproximación por cuadrados mínimos?
3. Finalmente, ¿cuál es la ventaja del **MGC** respecto de los métodos iterativos estacionarios?

Pregunta 3: El **Método de Extrapolación de Richardson** se basa en la siguiente suposición:

$$E(h) = M - N(h) = K_1 \cdot h + K_2 \cdot h^2 + K_3 \cdot h^3 + \ldots,$$

donde M es la solución «exacta» en tanto que $N(h)$ es la solución aproximada. Se pide:

1. Caracterice al error $E(h)$, según los tipos de errores que conoce.
2. Si $N(h)$ es una aproximación de la derivada primera, ¿qué debería cumplir $f(x)$ para aplicar este método?
3. ¿En que otras aproximaciones podría usar la Extrapolación de Richardson? Justifique su respuesta.

____
Firma alumna/o

75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ______________________________ Nº de Padrón: ________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada :_____ Cuatrimestre:___ Nota:___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 3

Pregunta 1: Al tratar de obtener una aproximación numérica de una derivada se obtuvieron los siguientes resultados:

$\mathbf{h} =$	0,1	0,05	0,025	0,0125
$\mathbf{f'(a)} =$	$-0{,}5701$	$-0{,}5471$	$-0{,}5354$	$-0{,}5236$

Si se sabe que el método utilizado es el de diferenciación progresiva, ¿cómo podría mejorar el resultado? Sin realizar cálculo alguno,¿hasta qué orden de convergencia podría mejorar la aproximación?

Pregunta 2: La obtención mediante una aproximación numérica de la inversa de una matriz de Hilbert de dimensión 3×3 con una representación numérica de un decimal, resulta ser:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}8 & 0{,}6 & -3{,}5 \\ 0{,}6 & -6{,}5 & 8{,}8 \\ -3{,}5 & 8{,}8 & -2{,}9 \end{bmatrix}$$

Si la matriz se expresa en forma simbólica, se obtiene el siguiente resultado:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow H^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

¿Puede explicar la razón de esta gran diferencia?

Pregunta 3: Al tratar de aproximar la raíz de la siguiente ecuación

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\,x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\,x\right) = 0$$

en el intervalo $[1{,}5; 3{,}5]$, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Método de la bisección: $\tilde{x}_n = 2{,}8125$;
- Método de Newton-Raphson: $\hat{x}_n = -2{,}4107$.

Explique la o las causas de esta diferencia.

Firma alumna/o

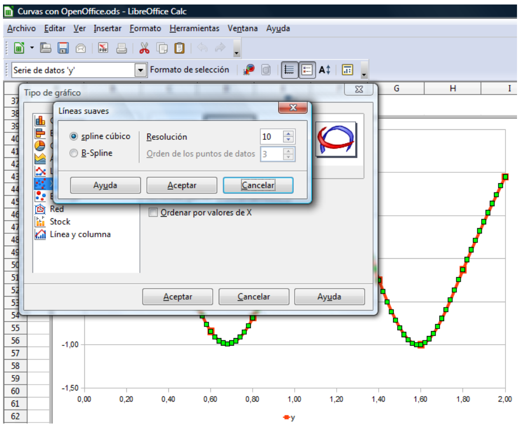
75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ______________________________ Nº de Padrón: ________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada : _____ Cuatrimestre: ___ Nota: ___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 4

Pregunta 1: En clase se ha visto que el MS Excel «suaviza» una curva sin definir qué método aplica para ello. Sí lo hace el OpenOffice/LibreOffice Calc, al aplicar una interpolación por «splines», como se ve en la figura siguiente:



1. ¿Qué dato debería agegar el OpenOffice/LibreOffice Calc?;
2. ¿Que otro(s) método(s) podría aplicar?

Pregunta 2: Durante el curso se han analizado los errores que se cometen al aplicar diferentes métodos que resuelven numéricamente problemas analíticos. Según lo visto:

1. ¿Cuál es el fin de analizar el error, si por definición no se conoce la solución analítica?
2. ¿Es posible despreciar la incidencia del error de redondeo en la diferenciación numérica?

Pregunta 3: Un método de integración numérica que no suele encontrarse en los libros es el denominado **Método del Trapecio Mejorado** cuya fórmula es:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right],$$

que utiliza además las derivadas en los extremos. Si los métodos del trapecio y de Simpson surgen de interpolaciones polinómicas que pasan por dos y tres puntos,

1. ¿Qué método de interpolación se aplica para obtener este nuevo método?
2. ¿Podría obtener el orden de convergencia?

Firma alumna/o

75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ____ Nº de Padrón: ________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada : _____ Cuatrimestre: ___ Nota: ___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 5

Pregunta 1: Un método para resolver **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valores Iniciales** de segundo orden es el siguiente:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 2y_i - y_{i-1} + h^2 f\left(t_i; w_i; \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) \text{ para } i \geq 2; \\ y_1 &= y_0 + h\, y_0 + \frac{h^2}{2!} f(x_0; y_0; y_0'). \end{aligned}$$

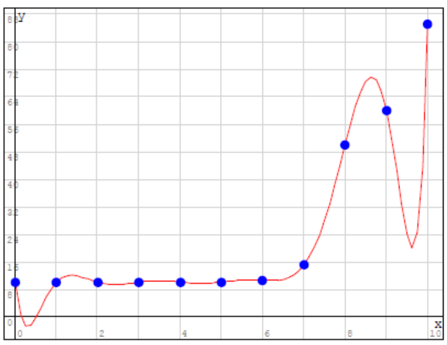
1. Clasifique al método.
2. ¿Qué puede decir de la aproximación de y_1?

Pregunta 2: Para aproximar una derivada primera en un punto x de una función cualquiera, se implementó un algoritmo compuesto por el **Método de Diferenciación Progresiva** y **Extrapolación de Richardson**. Para establecer si este algoritmo podría ser usado en algún programa o calculadora de bolsillo, se realizaron comparaciones para distintos valores de n, esto es, iteraciones por *Extrapolación de Richardson*, respecto de la solución analítica. Para un caso, los resultados obtenidos fueron:

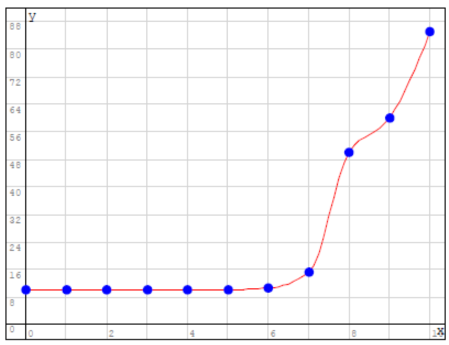
- Para $n = 6$ el error de la aproximación fue $-9{,}24 \cdot 10^{-13}$.
- Para $n = 9$ el error de la aproximación fue $-8{,}27 \cdot 10^{-12}$.

Si un valor de n mayor significa una mejor aproximación, ¿por qué en este caso no fue así?

Pregunta 3: En el gráfico siguiente pueden verse los resultados de aplicar dos métodos interpolantes:



Método 1



Método 2

¿Cuál de los dos métodos elegiría?

Firma alumna/o

75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ______________________________ Nº de Padrón: ________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada :_____ Cuatrimestre:___ Nota:___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 6

Pregunta 1: Al tratar de aproximar la raíz de la siguiente ecuación

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\,x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{9}\,x\right) = 0$$

en el intervalo $[1{,}5; 3{,}5]$, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Método de la bisección: $\tilde{x}_n = 2{,}8125$ con $n = 4$;
- Método de la Secante: $\hat{x}_n = 0{,}803571$ con $n = 6$.

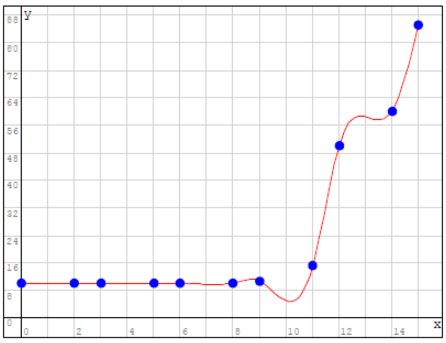
¿Puede explicar semejante diferencia y la razón por la cual el método de la Secante requiere más iteraciones que el método de la bisección?

Pregunta 2: Al tratar de calcular la siguiente función $(x) = 1 + x^2 + \dfrac{\log(|1 + 3(1 - x)|)}{80}$ en el punto $x = \dfrac{4}{3}$ con dos programas diferentes, se obtuvieron los siguientes resultados

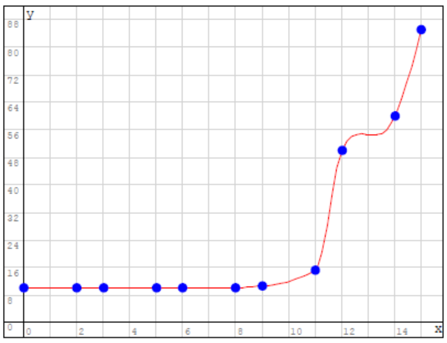
1. Programa 1: 2,58210828;
2. Programa 2: **Err:502** (argumento no válido).

¿Cuál de los dos resultados es el correcto? ¿A qué causa le atribuye el resultado erróneo?

Pregunta 3: En el gráfico siguiente pueden verse los resultados de aplicar dos métodos interpolantes:



Método 1



Método 2

¿Cuál de los dos métodos elegiría?

Firma alumna/o

75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ____ Nº de Padrón:________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada :_____ Cuatrimestre:___ Nota:___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 7

Pregunta 1: Suponga que dispone de los siguientes datos: a, $f(a)$, $f'(a)$, b, $f(b)$ y $f'(b)$, y necesita calcular $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Cómo podría desarrollar una expresión que permita la integración numérica en el intervalo dado que utilice todos los datos disponibles.

Pregunta 2: En algunos libros de Análisis Numérico se incluyen los denominados *Métodos Regresivos de Diferenciación* para resolver **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valores Iniciales**. Uno de esos métodos es el siguiente:

$$w_{i+1} = \frac{1}{3}\left(4\,w_i - w_{i-1}\right) + \frac{2}{3}hf(t_{i+1}; w_{i+1}).$$

1. Ensaye una clasificación del método;
2. Estime el error de truncamiento local, e;
3. Indique cuántos valores de w_j necesita para poder empezar a iterar, y cómo obtendría esos valores.

Pregunta 3: La **Interpolación por Trazadores Cúbicos** (o por «splines») es una alternativa para interpolar un conjunto con gran cantidad de puntos y una distribución *uniforme* de los mismos. Se proponen las siguientes expresiones para aproximar las derivadas primera en los extremos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\cong \frac{-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4}{12h}, \\ f'(x_n) &\cong \frac{25y_n - 48y_{n-1} + 36y_{n-2} - 16y_{n-3} + 3y_{n-4}}{12h}. \end{aligned}$$

Indique que tipo de «spline» necesita las derivadas en los extremos y evalúe si la propuesta es conveniente para ser aplicada.

Firma alumna/o

75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ____ Nº de Padrón:________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada :_____ Cuatrimestre:___ Nota:___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 8

Pregunta 1: La calculadora HP 20S dispone de un programa interno que calcula las raíces de una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Para ello emplea el siguiente algoritmo:

$$x_1 = \begin{cases} \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{si } b \leq 0, \\ \\ -\dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{si } b \geq 0. \end{cases} \qquad x_2 = \frac{c}{a\, x_1},$$

en vez del tradicional $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ¿Puede establecer alguna razón?

Pregunta 2: Para aproximar la derivada segunda en el punto $x = 2$ de una función determinada, se aplicó conjuntamente un método de **Diferenciación Progresiva** y **Extrapolación de Richardson**. Para saber si esta combinación es útil para programar, se compararon los resultados obtenidos para diferentes valores de n, esto es, iteraciones de la *Extrapolación de Richardson*, con la solución analítica. En una de las comparación se obtuvo lo siguiente:

- Para $n = 5$, el error de la aproximación fue $2{,}8 \cdot 10^{-10}$.
- Para $n = 7$, el error de la aproximación fue $1{,}9 \cdot 10^{-9}$.

Si un valor de n mayor significa una mejor aproximación, ¿por qué en este caso no fue así?

Pregunta 3: Al calcular la función $f(x) = 1 + x^2 + \dfrac{\log(|1 + 3(1 - x)|)}{80}$ en el punto $x = \dfrac{4}{3}$ con dos programas diferentes, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Programa 1: 2,5821;
- Programa 2: «`El logaritmo de cero no está definido`».

¿Cuál de los dos resultados es correcto? ¿A qué causa atribuye el resultado erróneo?

____
Firma alumna/o

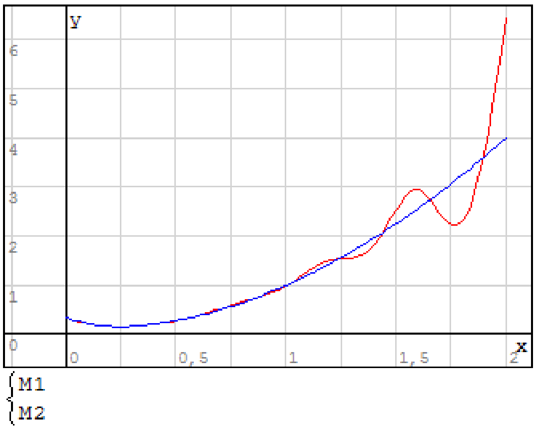
75.12 Análisis Numérico I - Curso 008

Apellido y nombre: ____________________ Nº de Padrón: ________

Fecha de la evaluación: ___/___/____ Año cursada :_____ Cuatrimestre:___ Nota:___ (____)

Evaluación Integradora
Tema 9

Pregunta 1: En la figura abajo puede verse la comparación entre los resultados obtenidos al resolver una ecuación diferencial ordinaria por los métodos de Adams-Moulton (curva azul) y de Adams-Bashforth (curva roja), ambos de orden 4.



¿Qué causa o causas explican la disparidad de resultados entre uno y otro método?

Pregunta 2: Un ejemplo usual para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales es el siguiente:

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} d\right)$$

con $L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi}$ y $\frac{L_0}{20} \leq d \leq \frac{L_0}{2}$. Para los valores $T = 12$ y $d = 14$ se obtuvieron los siguientes resultados:

- Por Aproximaciones sucesivas: $L = 131{,}4214$; número de iteraciones $n = 64$.
- Por Steffensen: $L = 131{,}4214$; número de iteraciones $n = 6$.

¿Qué conclusión puede sacar al respecto?

Pregunta 3: Al aproximar una derivada segunda con una combinación de un **Método Progresivo** y **Extrapolación de Richardson**, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Con $n = 5$, $f''(2) = -0{,}94970313$; orden de convergencia estimado: $\sim 5{,}6$;
- Con $n = 8$, $f''(2) = -0{,}94970312$; orden de convergencia estimado: ~ 3.

¿A qué causa atribuye el empeoramiento del orden de convergencia para $n = 8$?

Firma alumna/o